

体積力法による軸対称体の曲げ応力集中の解析*

(第1報, 基礎理論と二, 三の問題への応用)

村上敬宜**, 野田尚昭***, 西谷弘信****
Yukitaka MURAKAMI, Nao-aki NODA, Hironobu NISITANI**Key Words:** Elasticity, Stress Concentration, Body Force Method, Bending, Axially Symmetrical Body, Cavity

1. 緒 言

曲げモーメントを受ける軸対称体の解析は, 軸対称体が引張りあるいはねじりを受ける場合に比べて一般に困難である。これは引張りやねじりの場合には応力分布が軸対称であるのに対して曲げでは円周方向の応力の変化を考慮した非軸対称の取扱いが必要となるためである。有限要素法によれば原理的にはすべての場合について近似解を得ることができるが, 各種の形状寸法について系統的に精度の良い値を計算するには不向きである。軸対称体の曲げ問題の典型的な例としては, 金属材料の回転曲げ疲労試験における円周切欠きを有する丸棒試験片の応力集中問題がある。この場合の応力集中係数は主としてノイパーの三角則に基づいて近似的に求められているが^{(1)~(3)}, 強度研究上の必要性から正確な応力計算が期待されている⁽¹²⁾。

本論文では体積力法⁽⁴⁾⁽⁵⁾によってこれらの問題を解析する基礎理論を示す。またその計算精度を評価するため実際に二, 三の問題を解き, 厳密解が得られている場合については結果を比較する。基礎理論ではまずすでに確立されている軸対称体の引張り問題⁽⁶⁾⁽⁷⁾とねじり問題⁽⁸⁾の解法を新たに見直し, 曲げ問題において境界条件を満たすために必要な基本解の決定のしかたについて説明する。曲げ問題においては基本解は引張りやねじり問題のように自明ではないため, その決定に際しては基本解に基づく応力状態の十分な吟味と式の検討が必要である。しかし本方法ではいったんプログラムができあがると各種寸法を変えて系統的に応力集中の値を得ることが容易であり, 設計に必要な数表・線図などを作成することも可能である。

2. 計 算 理 論

体積力法によってこれまでに多くの問題が解かれており, その基本的原理もこれまでの報告⁽⁴⁾⁽⁵⁾に詳しく述べられている。本論文では軸対称体の曲げ問題を扱う場合に, これまでと異なる点を中心に述べることにする。

2.1 境界条件の満たし方 体積力法は最初に二次元元応力問題の電算機による解法として提案された⁽⁴⁾もので, 原理的には任意の問題が解けるとされているが, 精度の良い解を得るためには問題ごとに特別な工夫が必要であり, それが体積力法の長所でもあり欠点でもある。発展の初期には多くの二次元問題に応用されたが, 二次元応力問題では, (1) 無限板の一点に作用する集中力の応力場を基本とし, 境界条件の満たし方としては境界を有限個の区間に分割し, (2) 分割された区間の注目点(区間の midpoint)で境界条件を満たすことによって解を得る。この方法はその後三次元軸対称問題^{(6)~(8)}(形状と応力分布が軸対称)に応用されている。このときは(1)にかわるものとして(1)*無限体中の対称軸を中心とする円周上に軸対称分布力が作用するときの応力場を基本とした(基本解)。

軸対称体が引張りを受ける場合⁽⁶⁾⁽⁷⁾には図1(a), (b)に示す半径方向および軸方向の分布力が, また軸対称体がねじりを受ける場合⁽⁸⁾には図1(c)の周方向の分布力が基本解となることは容易に理解できる。(2)の分割された区間の注目点[図1(d)の○]で境界条件を満たす方法は, そのまま使用しているが, このとき軸対称性から軸を中心とする注目点を含む円周上のすべての点で境界条件は自動的に満たされたことになる。つまり(1)*円周上に作用する軸対称分布力と, (2)*分割された各区間の一つの円周上のすべての点で境界条件を満たすことによって平面問題から軸対称問題への拡張がなされたことになる。

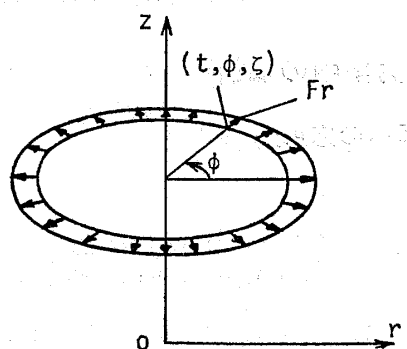
本論文で扱う問題は軸対称形状体に曲げモーメント

* 昭和56年4月1日 第58期通常総会講演会において論文講演として講演; 原稿受付 昭和55年10月6日。

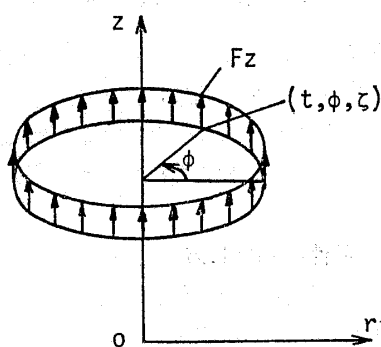
** 正員, 九州工業大学(〒804 北九州市戸畑区仙水町1)。

*** 学生員, 九州工業大学大学院。

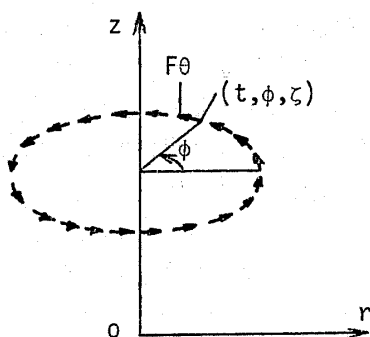
**** 正員, 九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)。



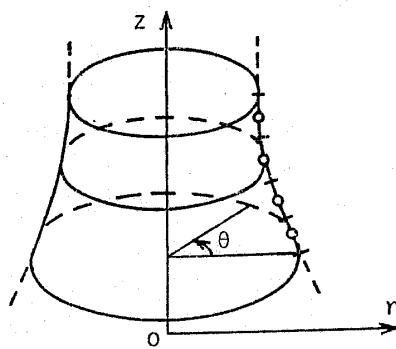
(a)



(b)



(c)



(d)

図1 軸対称問題（軸対称体が引張りもしくはねじりを受ける場合）の基本解 (a), (b), (c) と境界の分割 (d)

がかかる問題であるが、もし分割された各区間の一つの円周上における境界条件を完全に満足させることができるならば、いままでの体積力法による解析と同じ手順で解析できることが予想される。逆に言えば、円周上での非軸対称な境界条件を満足させるような (1), (1)* にかわる基本解を見つければよいことになる。しかしこの基本解は引張り問題やねじり問題のようにそれほど自明ではないので、基本解の決定には多少の試行錯誤は避けられない。

2.2 軸対称体の曲げ問題における基本解の性質

遠方で単純曲げを受ける無限体を考える。軸対称体の対称軸を z 軸にとり、曲げモーメントは z 軸に垂直な断面の $\theta = \pi/2$ の直線まわりに作用するものとする。遠方での曲げ応力は式 (1) で表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_0 \frac{r}{a} \cos \theta \quad \left(\begin{array}{l} \sigma_0 \text{ は曲げ応力の大きさを} \\ \text{表す定数, } a \text{ は代表寸法} \end{array} \right) \\ \sigma_r &= \sigma_\theta = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

遠方での曲げ応力 σ_z は半径 r の円周上で $\cos \theta$ で変化しているから、これに対応して基本解となる円

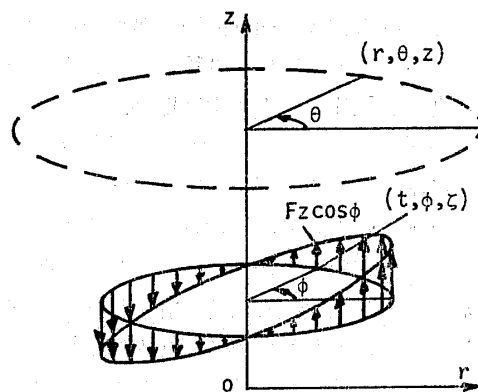


図2 無限体中の半径 t の円周上に分布する軸方向の力 $F_z \cos \varphi$

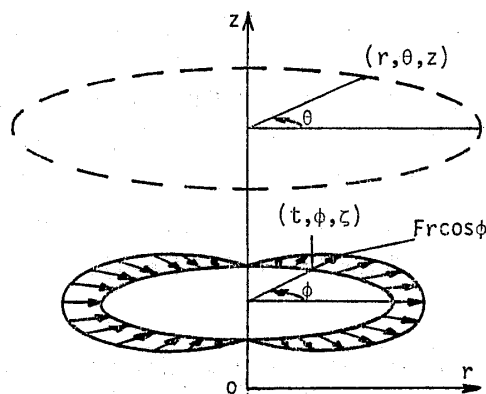


図3 無限体中の半径 t の円周上に分布する半径方向の力 $F_r \cos \varphi$

周上の z 方向分布力による応力 σ_z も、半径 r 高さ z の円周上では $\cos \theta$ で変化するものでなければならない。そこで無限体中の半径 t 、高さ ζ の円周上に、その大きさが $\cos \varphi$ で変化する軸方向の力（図 2）と、同じく $\cos \varphi$ で変化する半径方向の力（図 3）を考える〔 (t, φ, ζ) は力を作用させる点の円柱座標である〕。 $\cos \varphi$ で変化する z 方向の力のほかに $\cos \varphi$ で変化する r 方向の力を基本解として考えるのは、 z 方向の力によって生じる半径方向の応力を打ち消す必要があるからである。このとき、どちらの場合も、無限体中の 1 点 (r, θ, z) における応力は、3 章に示すように式 (2) の形で表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= f_1(r, t, z, \zeta) \cos \theta, & \sigma_\theta &= f_2(r, t, z, \zeta) \cos \theta, & \sigma_z &= f_3(r, t, z, \zeta) \cos \theta \\ \tau_{rz} &= f_4(r, t, z, \zeta) \cos \theta, & \tau_{r\theta} &= f_5(r, t, z, \zeta) \sin \theta, & \tau_{\theta z} &= f_6(r, t, z, \zeta) \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

式 (2) より、無限体中の 1 点 (r, θ, z) における応力が決定されれば、点 (r, θ, z) の応力 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ は $\theta=0$ の点の応力に $\cos \theta$ をかければ求まることがわかる。また、無限体中に想定した自由表面となるべき軸対称境界面の法線方向の応力 σ_n や子午線方向のせん断応力 τ_{nt} は式 (3) で与えられるから、これらの応力も円周上では $\cos \theta$ で変化していることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_r \cos^2 \phi_1 + \sigma_z \sin^2 \phi_1 + 2\tau_{rz} \sin \phi_1 \cos \phi_1 = (f_1 \cos^2 \phi_1 + f_3 \sin^2 \phi_1 + 2f_4 \sin \phi_1 \cos \phi_1) \cos \theta \\ \tau_{nt} &= (-\sigma_r + \sigma_z) \sin \phi_1 \cos \phi_1 + \tau_{rz} (\cos^2 \phi_1 - \sin^2 \phi_1) \\ &= \{(-f_1 + f_3) \sin \phi_1 \cos \phi_1 + f_4 (\cos^2 \phi_1 - \sin^2 \phi_1)\} \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ϕ_1 : 面の外向き法線と r 軸とのなす角度

したがって、境界条件を満たすべき円周上の $\theta=0$ の点において $\sigma_n = \tau_{nt} = 0$ の条件を満たせば、この円周上のすべての点で同じ境界条件が満たされる。

以上のように、図 2, 3 のような軸方向および半径方向の体積力を分布すると、 σ_n と τ_{nt} についての条件が境界条件を満たすべき円周上で満足されるので、これら 2 種類の分布力の組合せで解を得ることができそうに思われるが、実際にはこれだけではまだ不十分である。なぜなら、図 2, 3 の分布力を作用させたとき、せん断応力 $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$ に対応して自由表面となるべき面に式 (4) で表される周方向のせん断応力 $\tau_{n\theta}$ が生じるためである。

$$\begin{aligned} \tau_{n\theta} &= \tau_{r\theta} \cos \phi_1 + \tau_{\theta z} \sin \phi_1 \\ &= (f_5 \cos \phi_1 + f_6 \sin \phi_1) \sin \theta \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

この周方向のせん断応力は式 (4) で表されるように円周上で $\sin \theta$ で分布しているので、このせん断応力を打ち消すためには図 4 に示すように、周方向の力

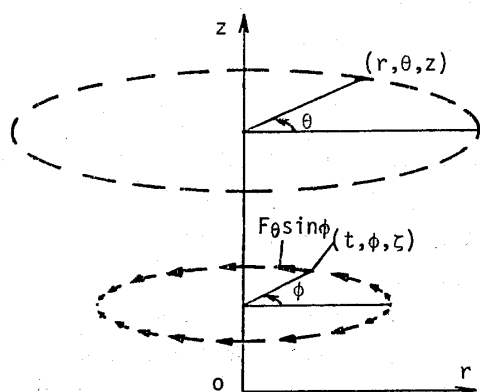


図 4 無限体中の半径 t の円周上に分布する周方向の力 $F_\theta \sin \varphi$

を $\sin \varphi$ で円周上に作用させることが必要になる。しかし、このために新たに生じてくる $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ が、式 (2) と同様な $\cos \theta$ で変化する性質をもたなければ σ_n, τ_{nt} についての境界条件を満たすことができなくなるが、これについては 3 章において図 4 のような分布力が作用するときの応力場も、好都合なことに式 (2) の形式で表されることを確認した。このように、図 2~4 の 3 形式の分布力の輪による応力場が、いずれの場合も式 (2) の形で表されることから、これらを組合わせて作用することにより曲面上の境界条件を満たすことができることになる。なお、せん断応力 $\tau_{n\theta}$ に関する境界条件を満たすには、注目する円周上の $\theta=\pi/2$ の点について条件を満たせば、円周上のすべての点で同じ条件を満たすことができる。

以上の議論から、図 2~4 に示すような 3 形式の分布力を境界上に作用させることによって、分割された区間の 1 点を含む円周上で境界条件は完全に満たされることがわかった。円周上の境界条件を満たすことができれば、これまでの体積力法による計算手順に従って解が得られることになる。ある 1 点 (r, θ, z) における応力が知りたいときには、 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ については $\theta=0$ の断面に注目して、 $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$ については $\theta=\pi/2$ の断面に注目して分布した体積力の全効果を積分して求めればよい。結局、式 (2) で表されるような応力場では、 $\cos \theta$ または $\sin \theta$ で周方向に変化する応力の振幅 $f_1 \sim f_6$ が決定されれば応力状態が決まるので、軸を含む一つの断面のみに注目して取扱うことができることになる。すなわち、未知数（分布体積力の大きさ）は 1 区間で 3 個であるが、二次元的取扱いができることになる。

3. 基本解

無限体中の1点 (t, φ, ζ) に半径方向の力 F_r , 周方向の力 F_θ , 軸方向の力 F_z が作用するときの任意の点 (r, θ, z) における応力 $\sigma_r^{Fr} \sim \tau_{\theta z}^{Fz}$, $\sigma_r^{F\theta} \sim \tau_{\theta z}^{F\theta}$, $\sigma_r^{Fz} \sim \tau_{\theta z}^{Fz}$ は式(5)で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{Fr} &= B_1 [(1-2\nu)R^{-3}[-r \cos(\varphi-\theta) + t\{2 \cos^2(\varphi-\theta)-1\}] \\ &\quad - 3R^{-5}\{r \cos(\varphi-\theta)-t\}\{r-t \cos(\varphi-\theta)\}^2] \\ \sigma_\theta^{Fr} &= B_1 [(1-2\nu)R^{-3}[r \cos(\varphi-\theta)-t\{2 \cos^2(\varphi-\theta)-1\}] - 3R^{-5}\{-r \cos(\varphi-\theta)+t\}t^2 \sin^2(\varphi-\theta)] \\ \sigma_z^{Fr} &= B_1 [(1-2\nu)R^{-3}-3(z-\zeta)R^{-5}]\{r \cos(\varphi-\theta)-t\} \\ \tau_{rz}^{Fr} &= B_1(z-\zeta)[-(1-2\nu)R^{-3} \cos(\varphi-\theta) - 3R^{-5}\{r \cos(\varphi-\theta)-t\}\{r-t \cos(\varphi-\theta)\}] \\ \tau_{r\theta}^{Fr} &= B_1 [(1-2\nu)R^{-3} \sin(\varphi-\theta)\{2t \cos(\varphi-\theta)-r\} \\ &\quad + 3R^{-5}t \sin(\varphi-\theta)\{r \cos(\varphi-\theta)-t\}\{r-t \cos(\varphi-\theta)\}] \\ \tau_{\theta z}^{Fr} &= B_1(z-\zeta)[-(1-2\nu)R^{-3} \sin(\varphi-\theta) + 3R^{-5}\{r \cos(\varphi-\theta)-t\}t \sin(\varphi-\theta)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.a)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{F\theta} &= B_2 [(1-2\nu)R^{-3} \sin(\varphi-\theta)\{r-2t \cos(\varphi-\theta)\} + 3R^{-5}r \sin(\varphi-\theta)\{r-t \cos(\varphi-\theta)\}^2] \\ \sigma_\theta^{F\theta} &= B_2 [(1-2\nu)R^{-3} \sin(\varphi-\theta)\{-r+2t \cos(\varphi-\theta)\} + 3R^{-5}rt^2 \sin^3(\varphi-\theta)] \\ \sigma_z^{F\theta} &= B_2 \{(1-2\nu)R^{-3}-3(z-\zeta)^2 R^{-5}\}\{-r \sin(\varphi-\theta)\} \\ \tau_{rz}^{F\theta} &= B_2(z-\zeta)[(1-2\nu)R^{-3} \sin(\varphi-\theta) + 3R^{-5}r \sin(\varphi-\theta)\{r-t \cos(\varphi-\theta)\}] \\ \tau_{r\theta}^{F\theta} &= B_2 [-(1-2\nu)R^{-3}[r \cos(\varphi-\theta)-t\{2 \cos^2(\varphi-\theta)-1\}] \\ &\quad - 3R^{-5}rt \sin^2(\varphi-\theta)\{r-t \cos(\varphi-\theta)\}] \\ \tau_{\theta z}^{F\theta} &= B_2(z-\zeta)\{-(1-2\nu)R^{-3} \cos(\varphi-\theta) - 3R^{-5}rt \sin^2(\varphi-\theta)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.b)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{Fz} &= B_3(z-\zeta)[(1-2\nu)R^{-3}-3R^{-5}\{r-t \cos(\varphi-\theta)\}^2] \\ \sigma_\theta^{Fz} &= B_3(z-\zeta)[(1-2\nu)R^{-3}-3R^{-5}t^2 \sin^2(\varphi-\theta)] \\ \sigma_z^{Fz} &= B_3(z-\zeta)[-(1-2\nu)R^{-3}-3R^{-5}(z-\zeta)^2] \\ \tau_{rz}^{Fz} &= B_3\{-(1-2\nu)R^{-3}-3(z-\zeta)^2 R^{-5}\}\{r-t \cos(\varphi-\theta)\} \\ \tau_{r\theta}^{Fz} &= B_3[3(z-\zeta)R^{-5}t \sin(\varphi-\theta)\{r-t \cos(\varphi-\theta)\}] \\ \tau_{\theta z}^{Fz} &= B_3\{-(1-2\nu)R^{-3}-3(z-\zeta)^2 R^{-5}\}\{-t \sin(\varphi-\theta)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.c)$$

ここで,

$$B_1 = \frac{F_r}{8\pi(1-\nu)}, \quad B_2 = \frac{F_\theta}{8\pi(1-\nu)}, \quad B_3 = \frac{F_z}{8\pi(1-\nu)} \quad (\nu: \text{ポアソン比}) \dots\dots\dots(5.d)$$

$$R^2 = r^2 + t^2 + (z-\zeta)^2 - 2rt \cos(\varphi-\theta) \dots\dots\dots(5.e)$$

ただし, F_r, F_θ, F_z は, 半径 t , 面積 $t d\varphi ds$ の微小曲面 C (図5) に次式の形で分布させる (各力の φ 方向の依存性については図2~4を参照).

$$dF_r \propto t \cos \varphi d\varphi d\zeta, \quad dF_\theta \propto t \sin \varphi d\varphi ds, \quad dF_z \propto t \cos \varphi d\varphi dt \dots\dots\dots(5.f)$$

式(5.a)~(5.c)において, F_r および F_z による応力は $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ が $\varphi' = \varphi - \theta$ の偶関数, $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$

が φ' の奇関数になっている. F_θ による応力は逆に $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ が φ' の奇関数 $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$ が φ' の偶関数である. 式(5.f)に注意すれば, F_r, F_z による応力については $t \cos \varphi$ をかけて, F_θ による応力については $t \sin \varphi$ をかけて φ' について $0 \sim 2\pi$ まで積分すれば, 求めるべき基本解 $\sigma_r^{Fr*}, \sigma_\theta^{Fr*}, \dots, \tau_{\theta z}^{Fz*}$ が得られる. このとき,

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \cos(\varphi' + \theta) = \cos \varphi' \cos \theta - \sin \varphi' \sin \theta \\ \sin \varphi &= \sin(\varphi' + \theta) = \sin \varphi' \cos \theta + \cos \varphi' \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

であるから, $0 \sim 2\pi$ について φ' に関する積分を行うとき奇関数についての積分は零になることを考慮する

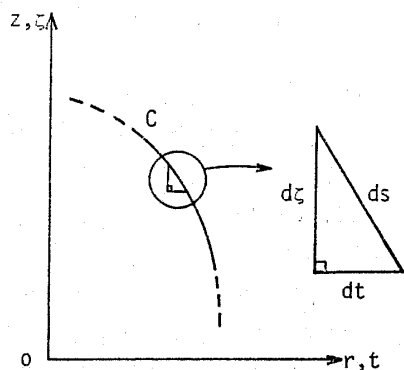


図5 体積力を分布させる微小曲面 C

と、式(2)の形式の応力場がいずれの場合にも得られることになる。結局、求める基本解 $\sigma_r^{Fr*} \sim \tau_{\theta z}^{Fr*}$ は式(7)のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{Fr*} &= \int_0^{2\pi} \sigma_r^{Frt} \cos \varphi' d\varphi' \cos \theta, & \sigma_\theta^{Fr*} &= \int_0^{2\pi} \sigma_\theta^{Frt} \cos \varphi' d\varphi' \cos \theta \\ \sigma_z^{Fr*} &= \int_0^{2\pi} \sigma_z^{Frt} \cos \varphi' d\varphi' \cos \theta, & \tau_{rz}^{Fr*} &= \int_0^{2\pi} \tau_{rz}^{Frt} \cos \varphi' d\varphi' \cos \theta \\ \tau_{r\theta}^{Fr*} &= - \int_0^{2\pi} \tau_{r\theta}^{Frt} \sin \varphi' d\varphi' \sin \theta, & \tau_{\theta z}^{Fr*} &= - \int_0^{2\pi} \tau_{\theta z}^{Frt} \sin \varphi' d\varphi' \sin \theta \\ \sigma_r^{F\theta*} &= \int_0^{2\pi} \sigma_r^{F\theta t} \sin \varphi' d\varphi' \cos \theta, & \sigma_\theta^{F\theta*} &= \int_0^{2\pi} \sigma_\theta^{F\theta t} \sin \varphi' d\varphi' \cos \theta \\ \sigma_z^{F\theta*} &= \int_0^{2\pi} \sigma_z^{F\theta t} \sin \varphi' d\varphi' \cos \theta, & \tau_{rz}^{F\theta*} &= \int_0^{2\pi} \tau_{rz}^{F\theta t} \sin \varphi' d\varphi' \cos \theta \\ \tau_{r\theta}^{F\theta*} &= \int_0^{2\pi} \tau_{r\theta}^{F\theta t} \cos \varphi' d\varphi' \sin \theta, & \tau_{\theta z}^{F\theta*} &= \int_0^{2\pi} \tau_{\theta z}^{F\theta t} \cos \varphi' d\varphi' \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$\sigma_r^{Fz*} \sim \tau_{\theta z}^{Fz*}$ については $\sigma_r^{Fr*} \sim \tau_{\theta z}^{Fr*}$ と同じ形式で表される。

φ' に関する $0 \sim 2\pi$ の積分は次に定義する積分 $I_1 \sim I_9$ の組合せによって表される。 $I_1 \sim I_9$ はすべて第1種および第2種の完全だ円積分 K, E で求めることができる⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。以下の式では $\varphi' = \varphi - \theta$ の φ' を新しく φ とおく。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^3} d\varphi = C_1 \frac{E}{k'^2}, & I_2 &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{R^3} d\varphi = C_1 \frac{(1+k'^2)E - 2k'^2 K}{k^2 k'^2} \\ I_3 &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi}{R^3} d\varphi = C_1 \frac{(1+6k'^2+k'^4)E - 4k'^2(1+k'^2)K}{k^4 k'^2} \\ I_4 &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 \varphi}{R^3} d\varphi = C_1 \frac{(3+29k'^2+29k'^4+3k'^6)E - 2k'^2(9-14k'^2+9k'^4)K}{3k^6 k'^2} \\ I_5 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^5} d\varphi = C_2 \frac{2(1+k'^2)E - k'^2 K}{3k'^4} \\ I_6 &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{R^5} d\varphi = C_2 \frac{2(1-k'^2+k'^4)E - k'^2(1+k'^2)K}{3k^2 k'^4} \\ I_7 &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi}{R^5} d\varphi = C_2 \frac{2(1-3k'^2-3k'^4+k'^6)E - k'^2(1-10k'^2+k'^4)K}{3k^4 k'^4} \\ I_8 &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 \varphi}{R^5} d\varphi = C_2 \frac{2(1-5k'^2-24k'^4-5k'^6+k'^8)E - k'^2(1-33k'^2-33k'^4+k'^6)K}{3k^6 k'^4} \\ I_9 &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 \varphi}{R^5} d\varphi = C_2 \frac{2(1-7k'^2-58k'^4-58k'^6-7k'^8+k'^{10})E - k'^2(1-68k'^2-122k'^4-68k'^6+k'^8)K}{3k^8 k'^4} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8.a)$$

ここで、

$$R^2 = r^2 + t^2 + (z - \zeta)^2 - 2rt \cos \varphi \dots\dots\dots (8.b)$$

$$C_1 = \frac{4}{\{(r+t)^2 + (z-\zeta)^2\}^{3/2}}, \quad C_2 = \frac{4}{\{(r+t)^2 + (z-\zeta)^2\}^{5/2}} \dots\dots\dots (8.c)$$

$$k^2 = \frac{4rt}{(r+t)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad k'^2 = 1 - k^2 \dots\dots\dots (8.d)$$

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}}, \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda} d\lambda \dots\dots\dots (8.e)$$

4. 具体的問題の解法

3章に示した基本解によって軸対称体の曲げの具体的問題を解くことができる。本報では基礎理論の応用として、図6に示す回転だ円体状空かおよび、図7に示すドーナツ状空どうの曲げによる応力集中問題を扱う。

4.1 体積力の密度の定義 本論文で扱う問題について、半径方向、円周方向、軸方向に分布する体積力の密度 $\rho_r, \rho_\theta, \rho_z$ を式(9)で定義する。

$$\left. \begin{aligned} \rho_r \cos \varphi &= \frac{dF_r}{td\zeta d\varphi} \\ \rho_\theta \sin \varphi &= \frac{dF_\theta}{tds d\varphi} \\ \rho_z \cos \varphi &= \frac{r}{a} \frac{dF_z}{td\zeta d\varphi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ρ_z については特に、曲げ応力場 $\sigma_z = \sigma_0(r/a) \cos \theta$ に対応して、このような定義にすると、精度向上のため都合がよい。

4.2 回転だ円体状空かの解法 この問題はノイバー⁽¹⁸⁾によって厳密解が得られており、本論文による方法の計算精度を評価することができる。ドーナツ状空どうの解もほぼ同様な手順で得られるので、以下では順に説明していく。

4.2.1 区間の分割 区間の分割は、回転だ円体状空かの形状を表すだ円 ($r^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$) を円に写像するときの中心角 ψ について等分割することによって行う。 ψ はだ円上の位置を式 (10) で定める。

$$r = a \cos \psi, \quad z = b \sin \psi \dots\dots\dots (10)$$

図 6 に示す区間 AB を n_1 分割し、A の側から順番に番号を 1 から n_1 までつけていくとき、 j 番めの区間の範囲 $\psi_{j1} \sim \psi_{j2}$ は式 (1) で与えられる。

$$\psi_{j1} = \frac{\pi(j-1)}{2n_1}, \quad \psi_{j2} = \frac{\pi j}{2n_1} \dots\dots\dots (11)$$

区間 AB' も同様に n_1 分割して A の側から対応する番号をつける。 i 番めの区間における注目点 (境界条件を満たす点、実際には円周) の位置は式 (12) で決定される。

$$\psi_i = \frac{\pi}{2n_1} (i-0.5) \dots\dots\dots (12)$$

平面 $z=0$ についての対称性から、AB の範囲で境界条件を満たすように、上下の対応する区間に同じ密度の体積力を分布すればよい。

4.2.2 影響係数の計算 j 番めの区間に密度一定の体積力を分布させたときの、 i 番めの区間の注目点における応力 $\sigma_{nij}^{\rho r}, \tau_{ntij}^{\rho r}, \tau_{n\theta ij}^{\rho r}, \sigma_{rij}^{\rho \theta}, \tau_{ntij}^{\rho \theta}$,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{nij}^{\rho r} &= \int_{\psi_{j1}}^{\psi_{j2}} \sigma_n^{Fr*} \frac{b}{a} t d\psi + \int_{-\psi_{j1}}^{-\psi_{j2}} \sigma_n^{Fr*} \frac{b}{a} t d\psi \\ \sigma_{nij}^{\rho \theta} &= \int_{\psi_{j1}}^{\psi_{j2}} \sigma_n^{F\theta*} \sqrt{\left(\frac{b}{a} t\right)^2 + \left(\frac{a}{b} \zeta\right)^2} d\psi + \int_{-\psi_{j1}}^{-\psi_{j2}} \sigma_n^{F\theta*} \sqrt{\left(\frac{b}{a} t\right)^2 + \left(\frac{a}{b} \zeta\right)^2} d\psi \\ \sigma_{nij}^{\rho z} &= \int_{\psi_{j1}}^{\psi_{j2}} \sigma_n^{Fz*} \frac{t}{a} \frac{a}{b} |\zeta| d\psi - \int_{-\psi_{j1}}^{-\psi_{j2}} \sigma_n^{Fz*} \frac{t}{a} \frac{a}{b} |\zeta| d\psi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 t, ζ は体積力を分布させる点の r 座標と z 座標であり、第 3 式第 2 項の負号は体積力を負の方向に分布することを示す。この ψ に関する積分は閉じた形では求まらないので、シンプソンの公式で数値積分する。

4.2.3 各区間に分布すべき体積力密度の決定 j 番めの区間に分布すべき体積力の密度 $\rho_{rj}, \rho_{\theta j}, \rho_{zj}$ は、境界条件を表す次の $3n_1$ 元連立方程式を解くことによって得られる。

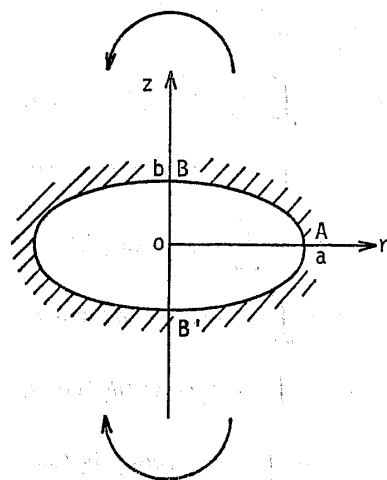


図 6 曲げを受ける無限体中の回転だ円体状空か

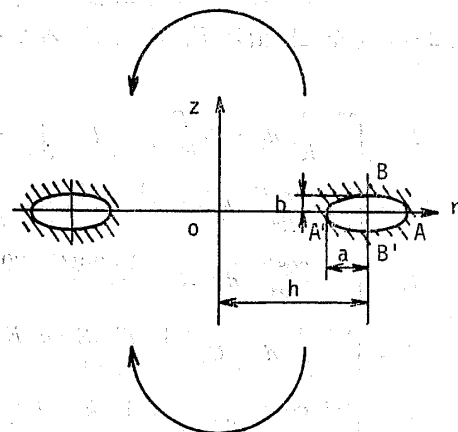


図 7 曲げを受ける無限体中のドーナツ状空どう

$\tau_{n\theta ij}^{\rho \theta}, \sigma_{rij}^{\rho z}, \tau_{ntij}^{\rho z}, \tau_{n\theta ij}^{\rho z}$ (影響係数) を計算する。これらの応力は 3 章で定義した基本解を式 (3), (4) で座標変換して得られる応力 $\sigma_n^{Fr*}, \tau_{nt}^{Fr*}, \dots, \tau_{n\theta}^{Fz*}$ を ψ について積分して求めることができる。

$\sigma_{nij}^{\rho r}, \sigma_{nij}^{\rho \theta}, \sigma_{nij}^{\rho z}$ を例にとると、

$$d\zeta = (b/a) t d\psi, \quad dt = (a/b) |\zeta| d\psi$$

であるから、式 (13) のようになる。 i 番めの区間の注目点の座標として、式 (10), (12) で与えられるものを代入する。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_1} (\rho_{rj} \sigma_{nij}^{\rho r} + \rho_{\theta j} \sigma_{nij}^{\rho \theta} + \rho_{zj} \sigma_{nij}^{\rho z}) + \sigma_0 \frac{r_i}{a} \sin^2 \phi_i &= 0 \\ \sum_{j=1}^{n_1} (\rho_{rj} \tau_{nij}^{\rho r} + \rho_{\theta j} \tau_{nij}^{\rho \theta} + \rho_{zj} \tau_{nij}^{\rho z}) + \sigma_0 \frac{r_i}{a} \sin \phi_i \cos \phi_i &= 0 \\ \sum_{j=1}^{n_1} (\rho_{rj} \tau_{n\theta ij}^{\rho r} + \rho_{\theta j} \tau_{n\theta ij}^{\rho \theta} + \rho_{zj} \tau_{n\theta ij}^{\rho z}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

r_i, ϕ_i は i 番めの注目点における r 座標と、注目点における円形の外向き法線と r 軸がなす角度である。各区間に分布する体積力の密度が決定されれば、任意の点における応力は求めた体積力の密度と影響係数〔式 (13) において i 番めの注目点の座標のかわりに求める点の座標を代入したもの〕との一次結合の形で求めることができる。

4.2.4. 注目点と着力点が一致するときの付加項について 4.2.2 項で各区間に分布した体積力の効果を求めているが、最大応力は体積力を分布する境界上(切欠き底)に生じるので、式 (5.a)~(5.c) の特異性から切欠き底近傍に分布した体積力の最大応力に及ぼす効果は特別に求める必要がある。この付加項は切欠き底が平面ひずみ状態にあるとして、境界から離れた点の影響を考え、それを境界上に近づける極限操作⁽⁴⁾を行って求めることができる。その結果は式 (15) のようになる⁽⁷⁾。 ε は最大応力の点を含む微小領域 ($\phi = -\varepsilon \sim \varepsilon$) を意味する。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_z^{\rho r} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \rho_r \\ \Delta \sigma_z^{\rho z} &= \frac{\{3+\nu/(1-\nu)\} \varepsilon}{2\pi} \rho_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

このほかに、注目点と着力区間の番号が一致するとき ($i=j$ のとき) にも、注目点近傍に分布した体積力による効果は同等の操作によって考慮した。

4.3 ドーナツ状空どうの解法 無限体中に図 7 に示すようなドーナツ状空どうが存在する場合も回転だ円体状空かの場合とほぼ同じように解析することができる。詳細は省略するが、この問題も平面 $z=0$ につ

表 1 回転だ円体状空かが曲げを受ける場合の応力集中係数 ($\left[\begin{array}{l} 6 \text{ 分割} \\ 8 \text{ 分割} \end{array} \right]$)

	$\nu=0$		$\nu=0.3$	
	本 計 算	ノイバー ⁽¹³⁾	本 計 算	ノイバー ⁽¹³⁾
$a=0.5b$	1.250 $\left[\begin{array}{l} 1.247 \ 4 \\ 1.248 \ 1 \end{array} \right]$	1.250	1.294 $\left[\begin{array}{l} 1.291 \ 5 \\ 1.292 \ 1 \end{array} \right]$	1.293
$a=b$	1.635 $\left[\begin{array}{l} 1.623 \ 6 \\ 1.626 \ 4 \end{array} \right]$	1.635	1.710 $\left[\begin{array}{l} 1.703 \ 8 \\ 1.705 \ 3 \end{array} \right]$	1.709
$a=2b$	2.460 $\left[\begin{array}{l} 2.433 \ 7 \\ 2.440 \ 3 \end{array} \right]$	2.459	2.564 $\left[\begin{array}{l} 2.560 \ 4 \\ 2.561 \ 3 \end{array} \right]$	2.564
$a=4b$	4.149 $\left[\begin{array}{l} 4.108 \ 5 \\ 4.118 \ 6 \end{array} \right]$	4.147	4.270 $\left[\begin{array}{l} 4.296 \ 0 \\ 4.289 \ 5 \end{array} \right]$	4.273

いての対称性から、この面について対称な体積力を分布させればよい。図 7 における ABA' の範囲を n_1 分割して、この範囲で境界条件を満足させる。応力集中は A 点および A' 点に生じるので、この 2 点での応力集中を計算する。

5. 計算結果

4 章までに示した基本解と計算手順に従って、回転だ円体状空かとドーナツ状空どうの曲げ応力集中を解析するプログラムを作成した。4.2.2 項に示した ϕ に関する積分はシンプソンの公式によって数値積分したが、その分割は一区間 10 分割である。注目点と着力区間の番号が一致するとき、応力集中部近傍の体積力の最大応力におよぼす効果を求める際には、特別に分割を 10 倍に増した。

5.1 回転だ円体状空かの応力集中 表 1 に回転だ円体状空かについての計算結果を示す。著者らの値は $n_1=6, 8$ の場合の値 (表 1 の $\left[\right]$ 上段と下段の値) から外そうによって求めたものである。ここでは表 1 に示す 4 種類の形状についてポアソン比 $\nu=0$ と 0.3 の場合で計算した。この問題はノイバー⁽¹³⁾によって厳密解が得られているので比較すると、8 分割程度の分割数から求めた値でも四けた程度の精度がある。誤差は最大で約 0.07 % であって、本論文の方法で高精度の応力集中の値を得ることができる。

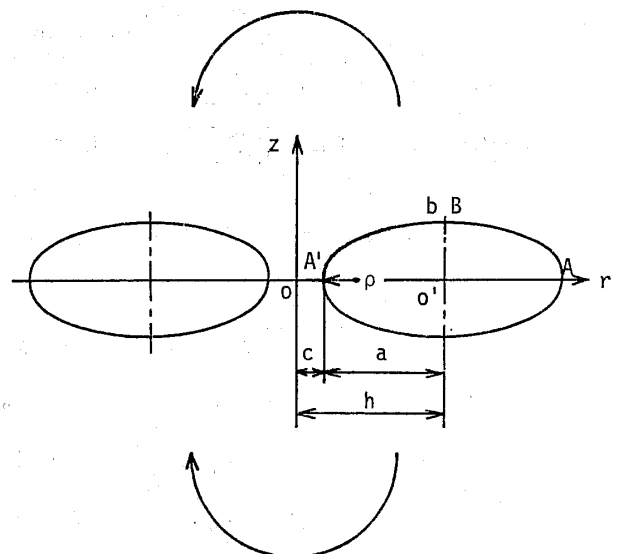


図 8 $c \ll a$ の場合のドーナツ状空どうの曲げ

5.2 ドーナツ状空どうの応力集中 ドーナツ状空どうが曲げを受ける場合については、これまで解析された例は見当たらないが、特別の場合にはこれまでに得られている厳密解と比較することができる。初めに計算精度を確認する意味で図8のような形状について計算を行った。空どう形状を表す円形が、長半径 $a=1.0$ 、短半径 $b=0.5$ であって、最小断面半径 $c \ll a$ の場合である。このような場合 A' 点近傍の応力集中状態はノイバーの回転双曲面切欠きの解⁽¹⁴⁾に近いことが予想される。応力集中係数は最小断面 OA' 間に生じる応力分布を積分して OA' 間のモーメント M を求め、 M によって与えられる公称応力 σ_{ni}^* を用いることにして、 K_{ti}^* で表す。最小断面 OA' 間の $\theta=0$ の位置における z 方向の垂直応力を $\sigma_{zi}(r)$ とすると、

$$M = 4 \int_0^c \int_0^{\pi/2} \sigma_{zi}(r) r^2 \cos^2 \theta d\theta dr$$

$$= \pi \int_0^c \sigma_{zi}(r) r^2 dr \dots \dots \dots (16)$$

$$K_{ti}^* = \frac{\sigma_{\max i}}{\sigma_{ni}^*}, \quad \sigma_{ni}^* = \frac{4M}{\pi c^3} \dots \dots \dots (17)$$

ここで、 $\sigma_{\max i}$ はドーナツ状空どう内側に生じる最大応力である。式(16)における r に関する積分は、シンプソンの公式によって数値積分して求めた。図8の ABA' 間の分割数 $n_1=16, 20$ の場合の値(表2の[])の上段と下段の値)と外そう値を表2に示す。これらの値と、同じ c/ρ (ρ は切欠き底 A' の曲率半径、 $\rho=b^2/a$) に対する回転双曲面切欠きの解⁽¹⁴⁾を比較すると、ほぼ一致していることがわかる。

表2 $c \ll a$ の場合のドーナツ状空どう内側の応力集中係数 $K_{ti}^*(a=2b, \nu=0)$ ([16分割]
[20分割])

	本	計	算	ノイバー ⁽¹⁴⁾
$c/\rho=1.0$ ($c/a=0.25$)	1.285	[1.262 8 1.267 2]		1.292
$c/\rho=0.5$ ($c/a=0.125$)	1.153	[1.104 5 1.114 2]		1.155

表3は空どう形状が $a=b$ と $a=2b$ の場合について、ドーナツ状空どうの空どう半径 $h(\gg a)$ をしだいに増すときのドーナツ状空どう内側および外側の応力集中係数 K_{ti} , K_{to} の変化を表にしたものである。これらの値は $n_1=12, 16$ の場合の値から外そうして求めた。この場合の公称応力は注目する点での公称応力 $\sigma_z = \sigma_0(r/c) \cos \theta$ をとった。すなわち A' および A における最大応力を $\sigma_{\max i}$, $\sigma_{\max o}$ とすると、 K_{ti} , K_{to} は式(18)で定義される。

$$\left. \begin{aligned} K_{ti} &= \frac{\sigma_{\max i}}{\sigma_{ni}}, & \sigma_{ni} &= \sigma_0 \\ K_{to} &= \frac{\sigma_{\max o}}{\sigma_{no}}, & \sigma_{no} &= \sigma_0 \frac{h+a}{c} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

図9は表3の応力集中の値を縦軸にとり、横軸に

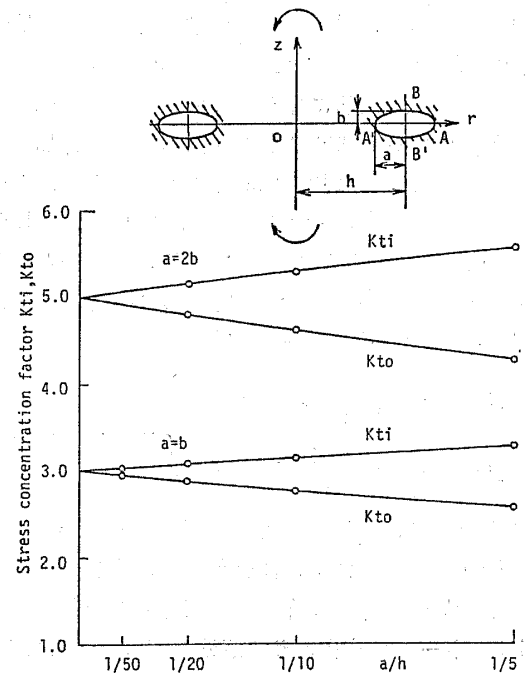


図9 ドーナツ状空どう半径 h を変えるときの応力集中係数 K_{ti} , K_{to} の変化 (K_{ti} , K_{to} : ドーナツ状空どう内側 A' および外側 A における応力集中係数)

表3 $h \gg a$ の場合のドーナツ状空どう内側および外側の応力集中係数 ($\nu=0$) ([12分割]
[16分割])

	$a=b$		$a=2b$	
	K_{ti}	K_{to}	K_{ti}	K_{to}
$h/a=5$	3.281 [3.273 1 3.275 1]	2.574 [2.573 6 2.573 7]	5.566 [5.553 9 5.556 9]	4.283 [4.283 5 4.283 4]
$h/a=10$	3.151 [3.146 9 3.147 9]	2.773 [2.773 6 2.773 4]	5.298 [5.291 6 5.293 1]	4.623 [4.624 2 4.624 0]
$h/a=20$	3.083 [3.080 9 3.081 4]	2.887 [2.887 7 2.887 6]	5.157 [5.153 9 5.154 8]	4.814 [4.812 6 4.813 0]
$h/a=50$	3.037 [3.035 4 3.035 8]	2.955 [2.956 8 2.956 4]	—	—

表 4 ドーナツ状空どうが曲げを受ける場合の応力集中係数 K_{ti} , K_{to} , K_{ti}^* ($\nu=0.3$)

	$a=0.5b$	$a=b$	$a=2b$
$h/a=1.5$	$K_{ti}=3.627$ $K_{to}=1.533$ $K_{ti}^*=1.034$	$K_{ti}=5.418$ $K_{to}=2.207$ $K_{ti}^*=1.142$	$K_{ti}=9.100$ $K_{to}=3.582$ $K_{ti}^*=1.508$
$h/a=2$	$K_{ti}=2.944$ $K_{to}=1.597$ $K_{ti}^*=1.074$	$K_{ti}=4.303$ $K_{to}=2.327$ $K_{ti}^*=1.277$	$K_{ti}=7.330$ $K_{to}=3.803$ $K_{ti}^*=1.893$
$h/a=3$	$K_{ti}=2.456$ $K_{to}=1.691$ $K_{ti}^*=1.148$	$K_{ti}=3.671$ $K_{to}=2.488$ $K_{ti}^*=1.524$	$K_{ti}=6.281$ $K_{to}=4.093$ $K_{ti}^*=2.443$
$h/a=5$	$K_{ti}=2.205$ $K_{to}=1.792$ $K_{ti}^*=1.297$	$K_{ti}=3.349$ $K_{to}=2.658$ $K_{ti}^*=1.867$	$K_{ti}=5.688$ $K_{to}=4.395$ $K_{ti}^*=3.092$

a/h をとって整理したものである。 $h/a \rightarrow \infty$ に従って、だ円孔を有する無限板が引張りを受ける場合の解 $K_t=1+2(a/b)$ に無理なく近づくようすがわかる。

このように図 7 に示すようなドーナツ状空どうについての計算結果は、 $c/a \rightarrow 0$ の場合にノイバーの回転双曲面切欠きの厳密解に一致し、 $h/a \rightarrow \infty$ の場合にはだ円孔を有する無限板を引張るときの解に一致する。このことは、その中間の場合にも高精度の計算が期待できることを意味する。形状比がこれら両極端の間にある場合について、 $\nu=0.3$ で計算した結果を表 4 に示す。これらの値は $n_1=12, 16$ の場合からの外そり値である。

ドーナツ状空どうの応力集中問題は、それ自体としての重要性は少ないが、次の段階で $r=h$ の円筒面における応力 σ_r , τ_{rz} , $\tau_{r\theta}$ を解放することによって円周切欠きを有する丸棒の解を得ることができるという点において、解法上重要な意味を持つ。

討

【質問】 岸田 路也 (北海道大学工学部)
浅野 政之 (東京芝浦電気会社)

体積力法による新しい分野への挑戦に敬意を表す。

(1) 体積力法について。

(i) 体積力は、面で規定されている量なのか、体積で規定されている量なのか。後者であれば、単位厚さの体積層を考えていると思われるがいかなるものか。

(ii) 数値計算上なされる体積力の滑らかでない分布の着重点を境界と一致させない理由は何か。つま

6. 結 言

本論文では、これまで主として平面問題や軸対称問題の解析に用いられてきた体積力法を、新しく軸対称の曲げ問題に適用する方法について考察した。この問題における基本解は、引張りやねじり問題のように自明ではないが、満足すべき境界条件と基本解によって生じる応力場の性質を十分検討することによって、無限体中の 1 円周上 (中心角 φ) に大きさが $\cos \varphi$ または $\sin \varphi$ で変化する 3 形式の力による応力場を基本解とすれば解が得られることを示した。この方法によって、回転だ円体状空かの曲げ問題を解析した結果、誤差は最大で 0.07 % であった。またドーナツ状空どうの応力集中の計算結果は、形状比の両極端の場合において厳密解と一致している。このように本論文の方法で精度良い応力集中の計算が可能であり、ドーナツ状空どうの問題は次の段階で円周切欠きを有する丸棒の曲げ問題へ発展させることができる。

文 献

- (1) Neuber, H., *Kerbspannungslehre*, (1957), Springer-Verlag.
- (2) Peterson, R. E., *Stress Concentration Design Factors*, (1962), John-Wiley & Sons.
- (3) 西田, 応力集中, (昭 48), 森北出版.
- (4) 西谷, 機誌, 70-580 (昭 42), 627.
- (5) Nisitani, H., *Mechanics of Fracture*, 5 (1978), Noordhoff.
- (6) 村上・西谷, 機論, 41-342 (昭 50), 360.
- (7) 村上・ほか 2 名, 機論, 47-423, A (昭 56), 1194.
- (8) 西谷・橋本, 機論, 43-374 (昭 52), 3642.
- (9) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, 355, (1951), McGraw-Hill.
- (10) 森口・ほか 2 名, 数学公式 I, (昭 31), 149, 岩波書店.
- (11) Tölke, F., *Praktische Funktionenlehre*, II (1966), 89, Springer-Verlag.
- (12) 宮本, 三次元弾性論, (昭 42), 10, 裳華房.
- (13) 文献 (1) の 120 ページ.
- (14) 文献 (1) の 101 ページ.

論

り、 $\ominus$ 境界などの設定はいかなる目安で行われれば良いのか。

(iii) 特異積分に対応する式 (15) で平面ひずみ状態を仮定されているが、例えば、軸対称問題における様に、この仮定は、軸から対象点が遠方にある場合に、良い解析精度をもたらすと考えて良いのか。

(2) 曲げについて。

応力の θ に関する依存性については、対象を限定する必要はないか。

(3) 解析精度について。

最大応力点以外の表面応力をうるには、やはり最大応力点応力の求め方と同様に行われると考えてよい。とすれば、注目点以外の応力は各計算において変動するのではない。

もし、最大応力点のみに注目をした解析において、他の境界上の点、特に条件を満足させた点以外では、その満足度はいかほどか。

外挿以前、以後について、公称応力を基準にしてお示し願いたい。

〔回答〕 (1) 体積力法について。

(i) 体積力は面で規定されている(層の厚さが無限に小さいとしたことに相当)量である。

(ii) 体積力を分布させる曲面と境界となるべき面は無限小だけ離れているとしている(境界の詳細に関しては、文献(4)を参照されたい)。

(iii) 表現が不明確で、誤解を生じやすくなっているが、「切欠き底が平面ひずみ状態にあるとして」は、詳しくいえば「微小領域 $\phi = -\varepsilon \sim \varepsilon$ 間に作用する体積力によって生じる注目点付近の変形が、平面ひずみ状態にあるとして」の意味である。したがって式(15)は、 ε が十分小さくなれば、平面ひずみ状態の式に限りなく近づく性質のものである。

(2) 曲げについて。

軸対称体の純粋曲げの範囲では、とくに対象を限定する必要はない。

(3) 解析精度について。

確かにご指摘のように境界条件を満たした点以外では切欠き表面に応力がわずかながら残るが、最大応力点や他の注目点以外の境界上の応力分布を計算することは、今のプログラムではできない。なお、その残った応力による影響が小さいことは厳密解との比較(例えば表1)から容易に推定できる。

〔質問〕 長谷川久夫(明治大学工学部)

(1) 曲げ問題への体積力法の応用、興味深く拝読させて頂いた。本論文で採用されている図2～4の物体力に対する基本解は、Mayr ら(付1)も曲げ問題にすでに応用しているが、本論文寄稿時には、この論文はまだ未発行だったものと思われる。そこで、基本解、解法ならびに数値計算結果(本論文の第2報も含む)について、本論文と Mayr らのものとの一致点と相違点について明示して頂きたい。

(2) 式(9)の体積力の密度の定義は、分布させる物体力の種類(作用方向)によって異なっており、真の境界 ds に沿っては物体力を

分布させていないように見受けられるが、このように分布させると解の精度の向上に都合よくなる理由をご教示願いたい。なお、物体力を分布させる面は真の境界に対してどの程度こだわらなければならないか。

(3) 注目点と荷重点が一致するとき、基本解の特異性を避けるために極限操作によって式(15)などを導かれているわけだが、その際、二次元理論の結果を利用されておられるように思われる。このように近似されても、数値計算結果にはほとんど影響はないようなので、実用上はさしつかえないわけだが、理論の一貫性を見地から見ると、三次元理論だけで、たとえば式(13)からの極限操作によって、式(15)に対応する結果が得られないものかと思われるがいかか。

(4) 式(15)の下に行からは、注目点と荷重点が一致するすべての点に対して極限操作が行われているように、また5章の始めのところからは、注目点と荷重点が一致する点でも数値積分が行われているように受けとられる。この点についてご説明願いたい。

〔回答〕 (1) 重要な文献のご指摘感謝する。

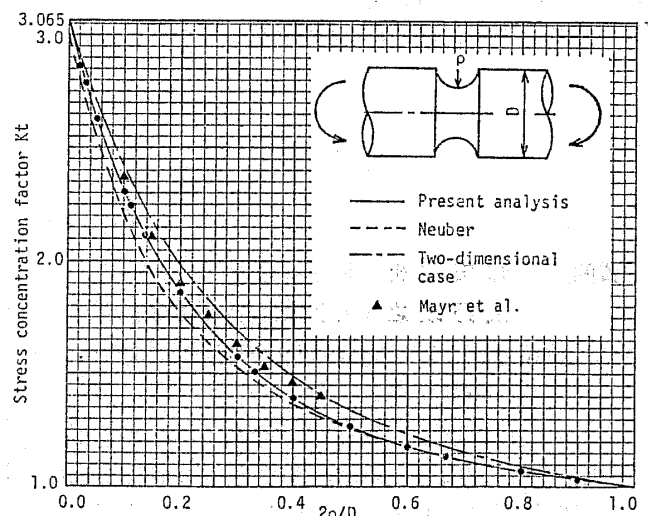
Mayr らの論文との比較について：

〔基本解〕 全く同じである。

〔解法〕 切欠きのない無限体中に作用する集中力による応力を基本としている点では体積力法⁽⁴⁾と全く同じだが、体積力の密度の定義が異なっている。この点が精度に大きく影響してくる。

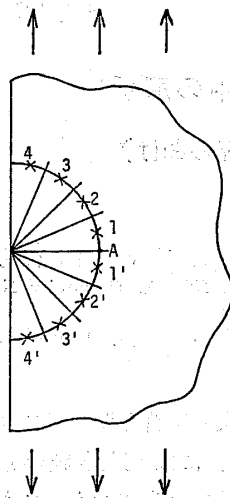
〔結果〕 付図1に示すようにならかなり異なっている。彼らの結果は $2\rho/D=0.45$ 付近で二次元の値とほぼ一致しているが、これは明らかに不自然である。

(2) 詳細については文献(5)を参照されたい。



付図1 半円形円周切欠きを有する丸棒の応力集中係数 K_t

(付1) Mayr, M., ほか2名, *Int. J. Solids Struct.*, 16-10 (1980), 863.



付図 2 半円切欠きを有する半無限板の引張り

境界にそって密度を定義したとき ($\rho_n = dF_n/ds$, $\rho_t = dF_t/ds$, n : 法線方向, t : 接線方向, s : 境界にそった長さ) に生じる矛盾についてのみここで説明する.

付図 2 (半円切欠きを有する半無限板の引張りを例にとる) において注目点 1~4, 1'~4' において境界

条件を満たしたとすると一般に ρ_n, ρ_t は零にはならない. とくに $\rho_{t1}(=\rho_{t-1})$ が零でなければ切欠き底 A 点の応力は無限大となる.

なお, 連続的に変化している体積力の密度を階段状の分布でおきかえるとき, 境界にそって密度の変化がなるべく小さいことが望ましいわけだが, 式 (9) はこの条件も満足している. 体積力を分布させる面は, 座標的にいえば, 真の境界面と一致している (両者が有限な距離はなれているとする解法ではき裂の問題は取扱うことができない).

(3) 式 (13) からの極限操作によっても, もちろん同一結果が得られる. それは式 (13) から極限操作によって二次元応力の式が完全に導かれることからいえる.

(4) 注目点が着力区間に含まれるとき, 数値積分にあたっては 1 区間を $2m$ 分割した. いま 1 区間の $1/(2m)$ を ε とするとき, 注目点を含んだ 2ε の範囲の積分には式 (15) に相当する式を用いた. すなわち, 1 区間の体積力の影響を, 数値積分によって求める項と直接積分する項とに分けて計算した.